



插值算法对透射边界数值模拟结果的影响分析

段雪良,周正华, 卞 祝, 韩 轶, 赵 玲, 李 政, 廖成亮, 贺家聪, 刘 伟

Analysis of the influence of interpolation algorithm on the numerical simulation results of transmission boundary

Duan Xueliang, Zhou Zhenghua, Bian Zhu, Han Yi, Zhao Ling, Li Zheng, Liao Chengliang, He Jiacong, and Liu Wei

在线阅读 View online: https://doi.org/10.19987/j.dzkxjz.2024-046

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于余震分析的宏观震中、地震影响场方向和极震区初步修正

Preliminary correction of the macro epicenter, the direction of the earthquake influence field and the meizoseismal area based on aftershock analysis

地震科学进展. 2021(7): 309-314

基于决策树算法的水位观测干扰识别模型

Groundwater observation interference recognition model based on decision tree algorithm 地震科学进展. 2019(11): 27-34

北京地电台网典型干扰及影响因素浅析

Analysis of typical interference and influence factors of Beijing geoelectric field observation network 地震科学进展. 2021(12): 560-568

模拟退火法在地震定位中的应用研究

Simulated annealing for earthquake location 地震科学进展. 2021(5): 223-229

鄂尔多斯活动地块边界带地震动力学模型与强震危险性研究项目及进展

Project plan and research progress on geodynamic models of earthquakes and strong seismic hazards in boundary zone of the Ordos active block

地震科学进展. 2020(4): 1-21

赣北地区构造应力场分析

The analysis of stress field in northern Jiangxi Province 地震科学进展. 2021(4): 161–168



关注微信公众号,获得更多资讯信息

段雪良,周正华,卞祝,等.插值算法对透射边界数值模拟结果的影响分析 [J]. 地震科学进展, 2025, 55(4): 197-208. doi:10.19987/j.dzkxjz.2024-046

Duan X L, Zhou Z H, Bian Z, et al. Analysis of the influence of interpolation algorithm on the numerical simulation results of transmission boundary[J]. Progress in Earthquake Sciences, 2025, 55(4): 197-208. doi:10.19987/j.dzkxjz.2024-046

插值算法对透射边界数值模拟结果的影响分析

段雪良 周正华** 卞 祝 韩 轶 赵 玲 李 政 廖成亮 贺家聪 刘 伟

(南京工业大学交通运输工程学院,南京 210009)

摘要 一个时间步内外行波以人工波速走过的距离与网格尺寸往往不一致,因此在应用透射边界公式时,一般通过时间插值或空间插值的方法将透射边界的计算结点用有限元结点表示。本文导出了拉格朗日插值算法、埃尔米特插值算法以及三次样条插值算法的透射边界一次透射插值公式,探讨不同插值算法对透射边界数值模拟结果的影响。首先将弹性半空间中入射 P/SV 波自由场问题的数值解与解析解对比,讨论3种插值算法对计算精度的影响,然后以半圆河谷地形入射 P/SV 波散射问题为例,对比不同插值算法计算得到的结果。数值结果表明:不同插值算法对透射边界数值模拟结果有显著影响,在3种插值算法中,三次样条插值算法计算精度最高,其次是拉格朗插值算法,相比之下,埃尔米特插值算法计算得到的精度较低。相比于自由场,散射问题的计算结果受3种插值算法的影响较大,拉格朗日插值算法与三次样条插值算法计算结果相近,而埃尔米特插值算法的计算结果差异较大。本研究成果为在应用透射边界模拟场地动力反应时,选择合适的插值算法提供了科学依据。

关键词 透射边界;插值算法;自由场;散射场
中图分类号: P315.9 文献标识码: A 文章编号: 2096-7780(2025)04-0197-12
doi: 10.19987/j.dzkxjz.2024-046

Analysis of the influence of interpolation algorithm on the numerical simulation results of transmission boundary

Duan Xueliang, Zhou Zhenghua, Bian Zhu, Han Yi, Zhao Ling, Li Zheng, Liao Chengliang, He Jiacong, Liu Wei

(College of Transportation Engineering, Nanjing Tech University, Nanjing 210009, China)

Abstract The distance traveled by contour wave with artificial wave velocity in a step-time is often inconsistent with the mesh size. Therefore, when the transmission boundary formula is applied, the calculation nodes of transmission boundary are usually represented by finite element nodes through the method of time interpolation or spatial interpolation. In this paper, the transmission boundary interpolation formulas of Lagrange interpolation algorithm, Hermite interpolation algorithm and cubic spline interpolation algorithm are derived, and the influence of different interpolation algorithms on



收稿日期: 2024-03-17; 采用日期: 2024-04-12。

基金项目:国家自然科学基金项目(U2039208)资助。

第一作者:段雪良(1998-),男,在读硕士研究生,主要从事场地效应方面的研究。E-mail: dxl0504@emails.bjut.edu.cn。

[※] 通信作者:周正华(1962-),男,研究员,主要从事地震工程领域研究。E-mail: bjsmoc@163.com。

the numerical simulation results of transmission boundary is discussed. Firstly, the numerical and analytical solutions of the incident P/SV wave free field problem in elastic half space are compared, and the influence of three interpolation algorithms on the calculation accuracy is discussed. Then, taking the scattering problem of incident P/SV wave in semicircular valley terrain as an example, the results obtained by different interpolation algorithms are compared. The numerical results show that: Different interpolation algorithms have significant influence on the numerical simulation results of transmission boundary. Among the three interpolation algorithms, the cubic spline interpolation algorithm has the highest accuracy, followed by Lagrange interpolation algorithm, and the Hermite interpolation algorithm has lower accuracy. Compared with the free field, the results of scattering problem are more affected by three interpolation algorithms, and the results of Lagrange interpolation algorithm and cubic spline interpolation algorithm are similar, while the results of Hermite interpolation algorithm are different. The findings of this study can serve as a scientific foundation for the selection of an appropriate interpolation algorithm when utilizing transmission boundaries to simulate the dynamic reaction process of the site.

Keywords transmission boundary; interpolation algorithm; free field; scattering field

0 引言

近场波动数值模拟的关键性问题在于建立近场 区域的边界条件,由于这一边界是人为设置的,故称 之为人工边界条件^[1]。人工边界要以保证有限近场区 域与无限外部区域之间波能量的交换为设置原则, 其又根据是否能够精确满足外部无限域内的所有场 方程和物理边界条件分为全局人工边界和局部人工 边界^[2]。

全局人工边界主要包括边界元法^[3-4]、波函数展 开法^[5]、薄层法^[6]等。由于全局人工边界不仅将所有 边界节点的运动耦联起来,而且还将全部过去时刻 的运动与当前时刻的运动耦联起来,这就导致在应 用全局人工边界进行时空域内的数值模拟时存在计 算量巨大的问题,难以满足实际需要^[2]。相比之下, 局部人工边界的主要特征是时空解耦,即一个边界 节点在某一时刻的运动仅与其临近节点临近时刻的 运动有关^[1],这极大地简化了数值计算,因此逐渐成 为研究人员关注的焦点。

局部人工边界是模拟外行波穿过人工边界向无 穷远传播的性质来实现的^[2],主要包括黏弹性边 界^[7-8]、Higdon边界^[9]、完美匹配层边界^[10]和透射边 界^[11]等。黏弹性边界是针对特殊波场建立的,一般情 况下其仅有零阶精度,但是实现简单,对于工程所关心 的、远离人工边界的结构反应而言具有实用价值^[12-15]。 Higdon边界是能够完全吸收不同入射角入射的若干 平面波的高阶人工边界,但存在高次时空导数,难以 直接采用位移有限元对其进行离散,同时构建差分 格式也较为困难。完美匹配层边界是可以实现外行 波无反射地进入边界吸收层的人工边界方案,但需 要引入复变量,因此在数学上,实现起来较为复杂。 相较于上述人工边界,透射边界具有以下优势:①透 射边界是从一般无限域模型出发,可直接用于各种 场方程,适用性广;②透射边界是由单向波导出,已 计入无限域中边界的影响,可适用人工边界上的各 节点,包括角点和分层界面点;③透射边界是一维表 达式,易于数值实现,且计算量小;④透射边界的精 度阶数含义明确且可控。基于以上优势,很多学者将 透射边界应用到局部地形场地效应研究上。

尽管透射边界具有很多优势,但其自身存在高 频振荡[16]和低频飘移[17]等稳定性问题,这些问题制 约了透射边界的工程应用。导致透射边界失稳的主 要原因可归结为:源自数值计算过程中产生的附加 内行波能量从人工边界持续渗透至计算区域内,进 而导致有限计算区内波动能量的累计增大。一种是 由人工边界反射引起的附加内行波,当反射系数大 于1时,将导致透射边界的高频振荡失稳[16];另一种 是数值积分过程中形成的附加内行波,由于舍入误 差等,将导致能量不断输入有限计算区域内,从而导 致低频飘移失稳[17]。针对高频振荡失稳,廖振鹏 和刘晶波^[18]给出了平滑因子抑制高频失稳的措施: 李小军和刘爱文^[19]、周正华和周扣华^[20]从显示积分 格式的能耗特性考虑,通过增加与应变速率成正比 的阻尼来抑制高频失稳。对于低频飘移失稳,李小军[21] 建议采用降阶的方式来抑制飘移失稳;周正华等^[22] 提出了在多次透射公式中引入修正因子的方式来消 除飘移失稳的措施。唐晖和李小军[23]系统地分析了 求解散射问题中消除多次透射边界漂移失稳措施的 效果。章旭斌等[24]等探究了透射边界高频失稳的机

理,并提供了一种稳定实现的方法。另外,透射边界 与普单元法结合,邢浩洁等^[25-27]提出了一种高效的 人工边界条件实现方法。

一个时间步内外行波以人工波速走过的距离与 网格尺寸往往不一致,因此在应用透射边界公式时, 一般通过时间插值或空间插值的方法将透射边界的 计算结点用有限元结点表示。插值技术作为连接透 射边界理论与有限元分析的重要环节,在以往研究 中普遍采用了拉格朗日插值方法对透射边界节点进 行数值插值。然而,关于插值算法选取对透射边界数 值模拟精度及其最终结果的影响探究尚显不足。基 于此,本文采用不同插值算法来计算透射节点,通过 对比不同插值算法计算的结果,来分析插值算法对 透射边界数值模拟结果的影响,研究成果为地震工 程研究者在应用透射边界理论进行场地动力反应数 值模拟过程时,选择合适的插值算法提供科学依据。

1 理论推导

1.1 透射边界理论

透射边界是通过模拟外行波透过边界的过程来 实现边界截断的。这一理论的要点包括两方面:第 一,给出穿过人工边界上一点并沿边界外法线方向 传播的单向波动的一般表达式,即将单向波动表示 成一系列外行平面波的叠加。第二,利用多次透射技 术模拟上述一般表达式。首先假定所有单向波动以 同一人工波速沿法线方向从边界透射出去,由此得 到一次透射公式,然后证明一次透射的误差也是具 有相同外行性质的单向波动,由此建立了二次进而 多次透射公式(MTF)。MTF 可以写作:

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} C_j^N u_j^{p-j+1}$$
(1)

式中, C_j^N 为二次多项式系数,离散位移 u_j^P 表达式如下:

$$u_i^p = u(jc_a\Delta t, \ p\Delta t) \tag{2}$$

式中, *c*_a为人工波速。考虑一次透射边界, 式(1)可以写为:

$$u[0, (p+1)\Delta t] = u(c_a\Delta t, p\Delta t)$$
(3)

由于在一个时间步内外行波以人工波速走过的 距离*c_aΔt*与网格尺寸Δx往往不一致,因此在应用式 (3)时,一般通过时间插值或空间插值的方法将透射 边界的计算结点用有限元结点表示(图1)。用有限元 三节点插值来表示式(3)中等式右端,计算表达式如下:

$$u(c_a\Delta t, \ p\Delta t) = t_{11}u(0, \ p\Delta t) + t_{12}u(\Delta x, \ p\Delta t) + t_{13}u(2\Delta x, \ p\Delta t)$$
(4)

式中, t₁₁, t₁₂和 t₁₃是插值系数。本文将推导不同插 值算法的一阶透射公式,着重探讨不同插值算法对 数值计算精度的影响。



图 1 透射边界计算结点与有限元插值结点

Fig. 1 Transmission boundary calculation node and finite element interpolation node

1.2 插值系数推导

1.2.1 插值基本概念

设函数y = f(x)有n个已知数据点 $[x_i, y_i], i = 0,$ 1,…,n,若存在一个简单函数P(x),使得 $P(x_i) = y_i,$ i = 0, 1, …, n成立。则P(x)为f(x)的插值函数。

1.2.2 拉格朗日插值

Lagrange 插值公式为:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (i = 0, \ 1, \ \cdots, \ n)$$
(5)

据此可以得到插值多项式:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \left(\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$
(6)

然后,将式(6)带入式(4)中,可以得到由拉格朗 日插值法计算得到的一次透射公式的插值系数:

$$t_{11} = \frac{1}{2} (-S + 1) (-S + 2)$$

$$t_{12} = S (-S + 2)$$

$$t_{13} = \frac{1}{2} S (S - 1)$$
(7)

式中, $S = \frac{c_a \Delta t}{\Delta x}$ 。

牛顿插值的一阶、二阶差商公式分别为:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$
(8)

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$
(9)

根据一阶、二阶差商公式,可以得到 N 阶差商的 表达式:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_0 - x_n} - \frac{f[x_1, \dots, x_n]}{x_0 - x_n}$$
(10)

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{-1}{(n-1)!(\Delta x)^{n-1}} C_{n-1}^i f(i\Delta x) \quad (11)$$

由此可得插值多项式:

$$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$
(12)

将式(12)带入式(4),可以得到由牛顿插值法计 算得到的一次透射公式的插值系数,如下:

$$t_{11} = \frac{1}{2}(-S+1)(-S+2)$$

$$t_{12} = S(2-S)$$
 (13)

$$t_{13} = \frac{S}{2}(S-1)$$

观察式(7)和式(13),可以发现,拉格朗日与牛顿插值算法一阶透射公式的插值系数相同,这是由于两种插值算法虽表达形式各异,但在本质上具有相同的阶次和系数多项式,因此对于高阶透射公式,同样会得出一致的插值系数。

1.2.4 三次埃尔米特插值

假定已知函数f(x)在插值区间 [p, q]上的n+1个 互不相同节点 $x_i(i=0, 1, \dots, n)$ 处满足 $f(x_i) = f_i$ 以及 $f'(x_i) = f'_i(i=0, 1, \dots, n)$,如果函数G(x)的存在满 足下列条件:

(1) G(x)在每个小区间上的多项式次数为3;

(2) $G(x) \in C[a, b];$

(3) $G(x_i) = f(x_i) \bigcup \bigcup \bigcup G'(x_i) = f'(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)_{\circ}$

则称 $G(x) \ge f(x) \ge n+1$ 个节点 x_i 上的分段三次 埃尔米特插值多项式。

根据埃尔米特插值要求,

(1)	0	0	0	0	0	
1	Δx	$(\Delta x)^2$	$(\Delta x)^3$	0	0	
0	0	0	0	1	Δx	
0	0	0	0	1	$2\Delta x$	4
0	1	$2\Delta x$	$3(\Delta x)^2$	0	-1	
0	0	2	$6\Delta x$	0	0	
0	0	2	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	

式中,
$$u_0 = u(0, p\Delta t)$$
, $u_1 = u(\Delta x, p\Delta t)$, $u_2 = u(2\Delta x, p\Delta t)$ 。求解式(18)便可得到每个区间内的三次方程。

$$G(x) = (1 - 3t^{2} + 2t^{3})y_{0} + t(1 - 2t + t^{2})m_{0} + t^{2}(3 - 2t)y_{1} + t^{2}(t - 1)m_{1}$$
(14)

其中, $t = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$, $m_0 = (u(\Delta x, t) - u(0, t))/\Delta x$, $m_1 = (u(2\Delta x, t) - u(\Delta x, t))/\Delta x$, 进而计算得到 插值系数公式:

$$t_{11} = \frac{9}{5}S^3 - \frac{14}{5}S^2 - \frac{1}{5}S + 1$$

$$t_{12} = -2S^3 + \frac{14}{5}S^2 + \frac{1}{5}S$$

$$t_{13} = \frac{1}{5}S^2(S-1)$$
(15)

1.2.5 三次样条插值

将区间 [*a*, *b*] 划分成 *n* 个区间, [(*x*₀, *x*₁), (*x*₁, *x*₂), …, (*x*_{n-1}, *x*_n)], 共有 *n*+1 个点, 其中两个端点 *x*₀=*a*, *x*_n=*b*。三次样条确保每个小区间的曲线都是一 个三次方程, 三次样条方程满足以下条件:

(1) 在每个分段区间 [x_i, x_{i+1}]上, 满足 S(x) = S_i(x)都是一个三次方程;

(2) 满足插值条件, $S_i(x) = y_i$;

(3) 曲线光滑, 即 *S*(*x*), *S*''(*x*), *S*''(*x*)连续。

采用三点插值,可以将整个区间划分为两段, 为[0, Δx]与[Δx, 2Δx]。在每个区间内求解一个三次 方程:

$$y = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad (i = 1, 2)$$
(16)

根据式(16)可知,待求未知系数共有8个。为了 求解两个区间内的三次函数,需要得到8个线性无 关的方程。满足插值条件可以提供4个方程,满足 *S*(*x*),*S*'(*x*)连续条件可以提供2个方程,另外考虑自 然边界条件,即

$$S''(0) = 0 = S''(2\Delta x)$$
(17)

上式也提供了2个方程。至此可以求解每个区 间内的三次方程,具体方程如下:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta x & (\Delta x)^2 & (\Delta x)^3 \\ \Delta x & 4(\Delta x)^2 & 8(\Delta x)^3 \\ -1 & -2\Delta x & -3(\Delta x)^2 \\ 0 & -2 & -6\Delta x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 12\Delta x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$
(18)

考虑到 $c_a \Delta t \leq \Delta x$,因此透射边界的计算结点落 在第一个区间内,满足第一个区间内的三次方程, 可得:

$$u(c_a\Delta t, t) = a_1 + b_1 c_a\Delta t + c_1 (c_a\Delta t)^2 + d_1 (c_a\Delta t)^3$$
 (19)

联合式(19)与式(4),便可得到插值系数:

$$t_{11} = 1 - \frac{5}{4}S + \frac{1}{4}S^{3}$$

$$t_{12} = \frac{3}{2}S - \frac{1}{2}S^{3}$$

$$t_{13} = -\frac{1}{4}S + \frac{1}{4}S^{3}$$
(20)

2 数值计算

2.1 入射波

通过分析自由场来验证不同插值算法的计算精 度,并以半圆河谷地形为例,分析不同插值算法对散 射场计算结果的影响。入射波位移脉冲为:

$$\begin{cases} u(t) = 16A \left[Z\left(\frac{t}{T}\right) - 4Z\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{4}\right) + 6Z\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right) - \\ 4Z\left(\frac{t}{T} - \frac{3}{4}\right) + Z\left(\frac{t}{T} - 1\right) \right] \\ Z(a) = a^{3}H(a) \end{cases}$$
(21)

式中, H(a)为赫维赛德函数,t是时间,A是脉冲的 峰值,T是脉冲的作用时间。入射波位移脉冲时程与 傅里叶频谱如图2所示。需要说明的是:对于自由场 问题,本文取T=1;对于散射场问题,本文取T=2。

2.2 有限元模型

本文数值模拟所取的材料参数分别为: 泊松比 v=0.25,介质密度 $\rho=2000 \text{ kg/m}^3$,弹性模型E= $5\times10^9 \text{ Pa}$ 。根据式(22)可以计算得出, P/SV 波的波速 分别为 $v_p=1732 \text{ m/s}, v_s=1000 \text{ m/s}$ 。

$$v_{\rm S} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}, \quad v_{\rm P} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$
 (22)



图 2 入射位移脉冲时程与傅里叶频谱 Fig. 2 Time history and Fourier spectrum of incident displacement pulse

假定一个波长包含 10 个网格,由此可以计算网格的最大尺寸。首先确定入射波的截止频率,然后根据下式可得:

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{10} = \frac{c_{\min}}{10f} = \frac{1\,000}{18 \times 10} = 5.56\,\mathrm{m}$$
(23)

要求一个时间步内,波传播的距离不大于一个 网格尺寸,进而可以确定时间步长,计算公式如下:

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{c_{\text{max}}} = \frac{5}{1\,732} \approx 0.002\,89\,\text{s}$$
 (24)

本文为了方便计算以及排除网格尺寸与时间步 长对计算结果的影响,统一取 $\Delta x = 5$ m, $\Delta t = 0.001$ s。 根据选定的时间步长和网格尺寸并结合式(7)、(15) 和(20),计算得到了3种插值算法的插值系数(表1)。

表 1 插值系数 Table 1 Interpolation coefficient

•							
插值系数	拉格朗日插值	埃尔米特插值	三次样条插值				
<i>t</i> ₁₁	0.7200	0.8704	0.7520				
<i>t</i> ₁₂	0.3600	0.1360	0.2960				
<i>t</i> ₁₃	-0.0800	-0.0064	-0.0480				

2.3 弹性半空间

本文研究所使用的自由场模型如图 3 所示,模型为矩形,长宽分别为 400 m 和 200 m。矩形的左上顶点坐标为(0,0),右下顶点为(400,-200)。入射波从左下方入射到计算区域内,入射点为(0,-200)。 *A*(200,0),*B*(200,-100)和*C*(200,-200)为观测点。







图 4 展示了 P 波垂直入射时,不同插值算法计 算得到的场区观测点的位移时程以及其与解析解对 比后的误差。P 波垂直入射时,3 种插值算法计算得 到的场区观测点的水平分量位移与解析解完美匹 配,误差几乎为零。相比于水平分量,竖向分量位移在 不同插值算法下计算得到的结果与精确解析解相 比,出现了明显误差,但绝对误差最大值均小于0.005。 另外,3 种插值算法计算得到的误差曲线走势基本相 同,但不同观测点最大误差出现的时间点不尽相同, 基本满足随着观测点 y 坐标值越小误差最大值出现 的时间越靠后的规律。



Fig. 4 Error analysis of the displacement time histories of the observation point in site when P wave is vertically incident

图 5 展示了 P 波 60°斜入射时,不同插值算法计 算得到的场区观测点的位移时程以及其与解析解对 比后的误差。相比于垂直入射,斜入射误差值明显增 大。拉格朗日插值与三次样条插值算法计算得到的 位移时程误差曲线基本相近,而埃尔米特插值算法 计算得到的位移时程误差曲线与其他两种插值算法 的结果明显不同,且埃尔米特插值算法计算得到的 误差更大。3 种插值算法计算得到的水平分量位移时 程误差比竖向分量大。另外,随观测点 y 坐标值减 小,误差最大值越大。 图 6 展示了 SV 波垂直入射时,不同插值算法计 算得到的场区观测点的位移时程以及其与解析解对 比后的误差。与 P 波垂直入射结果相反,3 种插值算 法计算得到的场区观测点的竖向分量位移与解析解 完美匹配,误差几乎为零,而水平分量位移误差较 P 波入射时情况显著增大,绝对误差最大值达到 0.02。 3 种插值算法对水平分量位移时程影响显著,对于观 测点 C,三次样条插值算法计算得到水平分量位移 时程误差结果与另外两种插值算法计算得到的结果 明显不同,其误差最大值最小,基本小于 0.001,而



Fig. 5 Error analysis of the displacement time histories of the observation point in site when the P-wave is 60° oblique incidence



图 6 SV 波垂直入射时,场区观测点位移时程的误差分析

Fig. 6 Error analysis of the displacement time histories of the observation point in site when SV wave is vertically incident

另外两种插值算法计算的误差均大于 0.01, 但上述 规律对于观测点 *A* 和 *B* 不满足。整体上, 对比于拉 格朗日插值和三次样条插值算法,埃尔米特插值算 法计算得到的误差曲线不同,且误差更大。

2 0.02 0.02 2 0.01 1 0.01 景差(U₁) 5 0 5 0 0 -0.01-0.01 $^{-1}$ 点A占 A 占 A 占 A -0.02 -0.02 -2 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0 0 0 0 t/st/st/st/s2 0.02 2 0.02 0.01 0.01 误差(U,) 1 误差(U.) 0 0 5 0 (-0.01-0.01 点 *B* 点 *B* 占 B 占 B -0.02 -0.02 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.2 0.4 0.6 0.2 0.4 0.6 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.8 1.0 0.8 1.0 0 0 0 0 t/st/st/st/s2 0.02 2 0.02 0.01 0.01 误差(U,) 误差(U.) 5 0 5 C 0 -0.01 -0.01 点 C 点 C 点 C 点 C -0.02 -0.02 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 ĺ٥. 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 0 0 0 t/st/st/st/s— 解析解 ---- 拉格朗日插值 埃尔米特插值 ---- 三次样条插值 图 7 SV 波 30°斜入射时,场区观测点位移时程的误差分析

Fig. 7 Error analysis of the displacement time histories of the observation point in site when the SV-wave is 30° oblique incidence

2.4 半圆河谷地形

本文研究所使用的散射场模型如图 8 所示,场 地的长宽尺寸分别为 400 m 和 200 m,区域的左上顶 点坐标为(0,0),右下顶点为(400,-200)。入射波从 左下方入射到计算区域内,入射点为(0,-200),半 圆形河谷的半径为 50 m,河谷圆心坐标为(200,0)。 根据网格划分的尺寸,沿地表水平方向每隔 5 m 取





Fig. 8 Calculate model of P and SV wave scattering by semicircular valley

一个观测点,并对观测点进行编号 P_i(i=1, 2, …, 81)。

垂直入射时,观测点位移时程关于地表中点中 心对称,因此选取左半区域中的4个典型观测点来 分析其位移时程受插值算法的影响。4个典型观测点 分别为*P*₁,*P*₁₆,*P*₃₁和*P*₄₁,其位置如图8所示。图9 展示了4个观测点在不同插值算法计算下P、SV波 垂直入射时位移时程的对比结果。P波垂直入射时, 观测点*P*₄₁水平分量位移时程始终为0,而对于SV 波,观测点*P*₄₁竖向分量位移时程为0,且不同插值 算法计算结果基本一致。不同插值算法对位移时程 的计算结果有显著影响,特别是靠近河谷区域的观 测点。图9所示表明拉格朗日插值和三次样条插值 算法计算得到的位移时程结果基本相近,而埃尔米 特插值算法计算结果却显著不同。

为了进一步分析斜入射时不同插值算法对位移时程计算结果的影响,图 10a展示了 P 波 60°斜入射时的位移时程对比结果。考虑 SV 入射时存在临界角(在本文选取的参数下为 35.26°)问题,因此计算了

图 7 展示了 SV 波 30°斜入射时的计算结果,其 规律与 P 波 60°斜入射时相似,最大的不同在于 SV

斜入射误差最大值比垂直入射小,且绝对误差最大 值均小于 0.01。



Fig. 9 Displacement time histories of observation point when P and SV waves are vertically incident

SV 波 30°斜入射时的位移时程,如图 10b 所示。本节 主要研究在散射问题中插值算法对透射边界计算结 果的影响,不同于垂直入射,地表点的位移时程具有 对称性,斜入射时,局部地形两侧的观测点的位移时 程显著不同,特别是靠近局部地形的观测点,需要重 点分析,因此本节所考察观测点为*P*₁,*P*₃₁,*P*₄₁和*P*₅₁。 观察图 10,不难发现相较于靠近河谷的观测点*P*₃₁, *P*₄₁和*P*₅₁,3种插值算法计算得到的观测点*P*₁的水 平和竖向位移时程结果基本一致。采用拉格朗日插 值和三次样条插值算法计算得到的位移时程结果基 本相近,而采用埃尔米特插值算法计算得到的位移 时程表现出来显著的差异,特别是观测点*P*₃₁和 *P*₅₁。尽管3种插值算法计算得到的位移时程曲线具 有差异,但这种差异多出现在位移时程的后半段,这 也导致3种插值算法计算得到的位移时程的峰值点 基本相同。

3 结论

为了将拉格朗日插值、埃尔米特插值和三次样 条插值算法应用到透射边界中,本文首先导出了不 同插值算法的一阶透射边界插值系数,进而沟通了 透射节点和有限元节点的关系,为透射理论与有限 元理论结合提供了基础。随后,通过比较3种插值算 法计算得出的自由场观测点位移时程与理论解析解 之间的差异,系统地评估了各插值方法在计算精度 方面的表现。此外,还深入探讨了这3种插值算法在 散射场观测点位移时程计算中的差异性,以此来详 尽剖析它们在透射边界数值模拟结果上的影响程



图 10 P、SV 波斜入射时观测点位移时程

Fig. 10 Displacement time histories of observation point when P and SV waves are oblique incident

度。得出了如下结论:

(1)插值算法对透射边界数值模拟结果有影响,特别是对于散射问题。

(2)3种插值算法中,三次样条插值算法计算精 度最高,其次是拉格朗日插值算法,最后是埃尔米特 插值算法。

(3) 散射问题中, 拉格朗日插值算法与三次样条 插值算法计算结果相近, 而埃尔米特插值算法的计 算结果差异较大。

本文采用的一阶透射公式数值模拟精度很高, 误差均不大于1%,特别是三次样条插值算法,精度 最高。本文提供了三次样条插值算法的插值系数计 算公式(式(20)),研究人员可根据数值模拟所取网 格尺寸和时间步长进行插值系数计算。值得注意的 是:在本研究中,所获得的所有插值系数均基于一阶 透射公式构建,而对于更高阶数的透射公式对应的 插值系数,其精确推导有待深入研究。此外,通过大 量数值模拟案例的系统性分析,揭示了插值算法对 透射边界的计算结果所产生的影响规律,但欠缺针 对这一现象背后数学机制的理论解析。

致谢

本文由国家自然科学基金项目(U2039208)资助。感谢审稿人的建设性意见,这些意见极大地改进 了本文。

参考文献

- [1] 廖振鹏. 工程波动理论导论 [M]. 2版. 北京: 科学出版社, 2002
- Liao Z P. Introduction to wave motion theories in engineering[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2022
- [2] 廖振鹏. 近场波动的数值模拟 [J]. 力学进展, 1997, 27(2): 193-216 Liao Z P. Numerical simulation of near-field wave motion[J]. Advances in Mechanics, 1997, 27(2): 193-216
- [3] Gao Z Y, Li Z L, Liu Y J. A time-domain boundary element method using a kernel-function library for 3D acoustic problems[J].
 Engineering Analysis with Boundary Elements, 2024, 161: 103-112
- [4] Liu Z X, Ai T C, Huang L, et al. The scattering of seismic waves from saturated river valley with water layer: Modelled by indirect boundary element method[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2023, 149: 282-297
- [5] Lee V W, Liu W Y. Two-dimensional scattering and diffraction of P-and SV-waves around a semi-circular canyon in an elastic halfspace: An analytic solution via a stress-free wave function[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2014, 63: 110-119
- [6] 李小信,何超,周顺华,等.具有不规则界面的层状地基三维动力响应的薄层法[J].岩土力学,2023,44(增刊1):655-668

Li X X, He C, Zhou S H, et al. Thin layer method for three-dimensional dynamic response of layered foundation with irregular interfaces[J]. Rock and Soil Mechanics, 2023, 44(S1): 655-668

- [7] 刘晶波, 王振宇, 杜修力, 等. 波动问题中的三维时域粘弹性人工边界 [J]. 工程力学, 2005, 22(6): 46-51
 Liu J B, Wang Z Y, Du X L, et al. Three-dimensional visco-elastic artificial boundaries in time domain for wave motion problems[J].
 Engineering Mechanics, 2005, 22(6): 46-51
- [8] 杜修力,赵密.基于黏弹性边界的拱坝地震反应分析方法[J].水利学报,2006,37(9):1063-1069
 Du X L, Zhao M. Analysis method for seismic response of arch dams in time domain based on viscous-spring artificial boundary condition[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2006, 37(9): 1063-1069
- [9] Higdon R L. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic waves in stratified media[J]. Journal of Computational Physics, 1992, 101(2): 386-418
- [10] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(2): 185-200
- [11] Liao Z P, Wong H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1984, 3(4): 174-183
- [12] 吴翔, 丁海平. 基于粘弹性边界的三维土体地震响应分析 [J]. 苏州科技大学学报(工程技术版), 2023, 36(4): 1-7 Wu X, Ding H P. Seismic response analysis of three-dimensional soil based on viscoelastic boundary[J]. Journal of Suzhou University of Science and Technology (Engineering and Technology Edition), 2023, 36(4): 1-7
- [13] 秦得顺, 郭永刚, 苏立彬, 等. 基于粘弹性边界在重力坝动力分析中的应用 [J]. 云南水力发电, 2024, 40(3): 74-77 Qin D S, Guo Y G, Su L B, et al. Application of viscoelastic boundary in dynamic analysis of gravity dam[J]. Yunnan Water Power, 2024, 40(3): 74-77
- [14] 刘喜珠, 江琦, 张健, 等.考虑管-土耦合的穿管堤防地震动力响应分析[J].水电能源科学, 2023, 41(12): 129-133
 Liu X Z, Jiang Q, Zhang J, et al. Seismic dynamic response analysis of pipe-piercing dike considering pipe-soil coupling[J]. Water Resources and Power, 2023, 41(12): 129-133
- [15] 陈志伟, 史振华, 钟红, 等. 陡崖地形上重力坝地震响应分析研究 [J]. 水利规划与设计, 2023(6): 117-122 Chen Z W, Shi Z H, Zhong H, et al. Seismic response analysis of gravity dams on steep cliff terrain[J]. Water Resources Planning and Design, 2023(6): 117-122
- [16] 廖振鹏, 刘晶波. 波动有限元模拟的基本问题 [J]. 中国科学: B 辑, 1992(8): 874-882
 Liao Z P, Liu J B. Basic problems of wave finite element simulation[J]. Science in China (Series B), 1992(8): 874-882
- [17] 周正华,廖振鹏. 消除多次透射公式飘移失稳的措施 [J]. 力学学报, 2001, 33(4): 550-554
 Zhou Z H, Liao Z P. A measure for eliminating drift instability of the multi-transmitting formula[J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(4): 550-554
- [18] 廖振鹏, 刘晶波. 波动的有限元模拟: 基本问题和基本研究方法 [J]. 地震工程与工程振动, 1989, 9(4): 1-14 Liao Z P, Liu J B. Finite element simulation of wave motion: Basic problems and conceptual aspects[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 1989, 9(4): 1-14
- [19] 李小军, 刘爱文. 动力方程求解的显式积分格式及其稳定性与适用性 [J]. 世界地震工程, 2000, 16(2): 8-12

Li X J, Liu A W. Explicit step-by-step integration formulas for dynamic differential equation and their stability and applicability[J]. World Information on Earthquake Engineering, 2000, 16(2): 8-12

- [20] 周正华, 周扣华. 有阻尼振动方程常用显式积分格式稳定性分析 [J]. 地震工程与工程振动, 2001, 21(3): 22-28 Zhou Z H, Zhou K H. Stability analysis of explicit integral methods for damped vibration equation[J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2001, 21(3): 22-28
- [21] 李小军.非线性场地地震反应分析方法的研究 [D]. 哈尔滨:中国地震局工程力学研究所, 1993
 Li X J. Research on nonlinear site seismic response analysis method[D]. Harbin: Institute of Engineering Mechanics, China Earthquake Administration, 1993
- [22] 周正华,魏景芝,王玉石,等.修正算子γB₀⁰的物理含义及精度分析 [J]. 计算力学学报, 2011, 28(1): 20-24 Zhou Z H, Wei J Z, Wang Y S, et al. The physical implication and the precision analysis of modified operator γB₀⁰[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2011, 28(1): 20-24
- [23] 唐晖,李小军.求解散射问题中消除多次透射边界飘移失稳措施的效果分析[J]. 地震研究, 2019, 42(4): 493-502 Tang H, Li X J. Analysis on measures of eliminating drift instability of multi-transmission formula in solving scattering problems[J]. Journal of Seismological Research, 2019, 42(4): 493-502
- [24] 章旭斌, 廖振鹏, 谢志南. 透射边界高频失稳机理及稳定实现: P-SV 波动 [J]. 地球物理学报, 2021, 64(10): 3646-3656 Zhang X B, Liao Z P, Xie Z N. Mechanism of high frequency instability and stable implementation for transmitting boundary: P-SV wave motion[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2021, 64(10): 3646-3656
- [25] 邢浩洁,刘爱文,李小军,等.多人工波速优化透射边界在谱元法地震波动模拟中的应用[J].地震学报, 2022, 44(1): 26-39
 Xing H.L. Liu, A.W. Li, X.L. et al. Application of an optimized transmitting boundary with multiple artificial wave velocities in

Xing H J, Liu A W, Li X J, et al. Application of an optimized transmitting boundary with multiple artificial wave velocities in spectral-element simulation of seismic wave propagation[J]. Acta Seismologica Sinica, 2022, 44(1): 26-39

- [26] 邢浩洁,李小军,刘爱文,等. 波动数值模拟中的外推型人工边界条件 [J]. 力学学报, 2021, 53(5): 1480-1495 Xing H J, Li X J, Liu A W, et al. Extrapolation-type artificial boundary conditions in the numerical simulation of wave motion[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(5): 1480-1495
- [27] 邢浩洁, 李鸿晶, 李小军. 一维波动有限元模拟中透射边界的时域稳定条件 [J]. 应用基础与工程科学学报, 2021, 29(3): 617-632

Xing H J, Li H J, Li X J. Time-domain stability conditions of multi-transmitting formula in one-dimensional finite-element simulation of wave motion[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2021, 29(3): 617-632